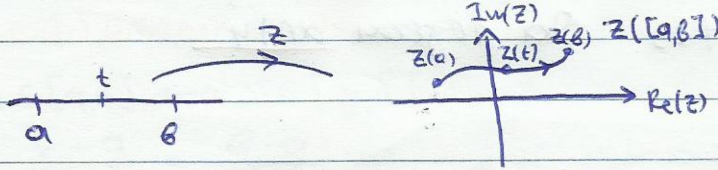
ΚΑΜΠΥΛΗ

είναι το σύνολο των τιμών της συνάρτησης $z: [a,b] \to \mathbb{C}$



Πιο ολοκληρωμένα είναι το προσανατολισμένο σύνολο τιμών της $z: [a,b] \to \mathbb{C}$

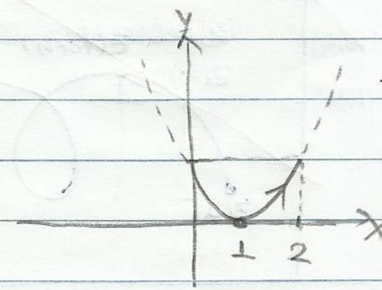
$z(t) = x(t) + i\,y(t)$, x, y πραγματικές συναρτήσεις στο $[a,b]$

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} , \; t \in [a,b]$$

Πχ

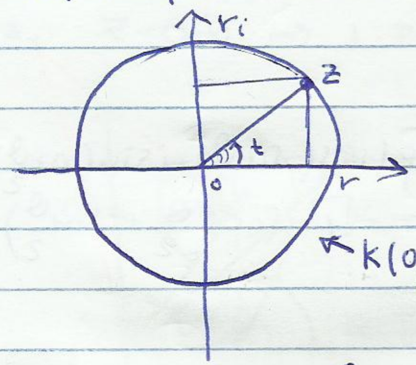
$$\begin{cases} x = t+1 \\ y = t^2 \end{cases} , \; t \in [0,1] \rightsquigarrow z(t) = t+1 + i(t^2)$$

Έτσι, $t = x-1$ άρα $y = (x-1)^2$ παραβολή



ΚΑΜΠΥΛΗ-ΚΥΚΛΟΣ

$K(a,r) = \{z\in\mathbb{C} : |z-a| = r\}$ με παράμετρο $t\in[0,2\pi]$

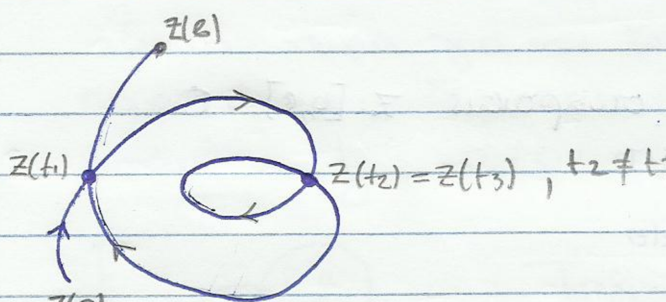


$z = x+iy = r(\text{συν}t + i\,\text{ημ}t)$

Έτσι, $K(a,r) = \{z = a + r(\text{συν}t + i\,\text{ημ}t),\ t\in[0,2\pi]\}$

JORDAN ΚΑΜΠΥΛΕΣ:

Όταν $z(a)=z(b)$ τότε η καμπύλη είναι κλειστή



όταν $t_1\neq t_2 \neq \{a,b\} \Rightarrow$

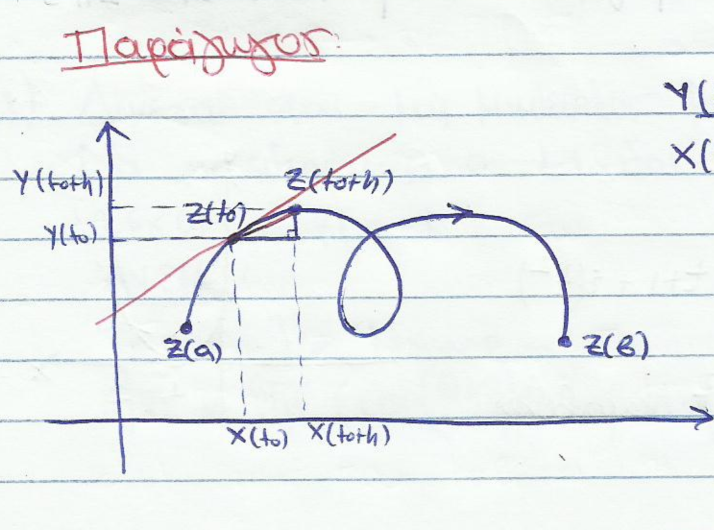
$\Rightarrow z(t_1)\neq z(t_2)$ τότε

θα λέγεται απλή

Όταν μία καμπύλη είναι κλειστή & απλή τότε θα λέγεται καμπύλη Jordan

Παράγωγος

$$\frac{y(t_0+h)-y(t_0)}{x(t_0+h)-x(t_0)} = \frac{\frac{y(t_0+h)-y(t_0)}{h}}{\frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h}} \to \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$$



Έτσι, $\gamma: z(t) = x(t)+iy(t)$ για $t\in[a,b]$ είναι διαφορίσιμη εάν οι συναρτήσεις $x(t), y(t)$ παραγωγίσιμες

Εαν $z(t)$ διαφορίσιμη και $|z'(t)| \neq 0$ τότε η καμπύλη καλείται λεία

Πχ

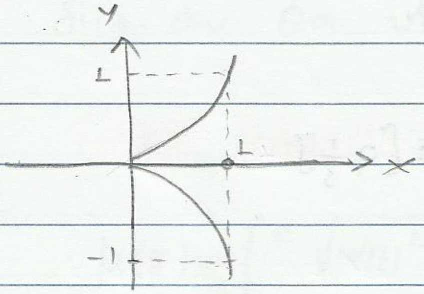
$$x = t^2, \quad y = t^3, \quad t \in [-1,1]$$

$z(t) = t^2 + i t^3$

$z'(t) = 2t + 3i t^2 = 0 \Leftrightarrow t = 0 \in [-1,1]$ δεν είναι λεία

για το γράφημα της

$t = \sqrt[3]{y} \rightsquigarrow x = y^{2/3} \rightsquigarrow y = \pm x^{3/2}$

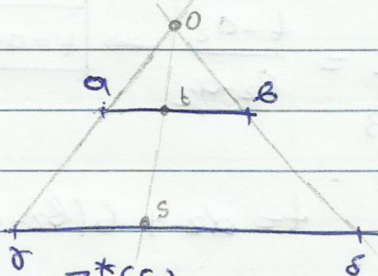


ΑΝΑΠΑΡΑΜΕΤΡΗΣΗ:

$t \in [a,b] \longleftrightarrow s \in [\gamma,\delta]$

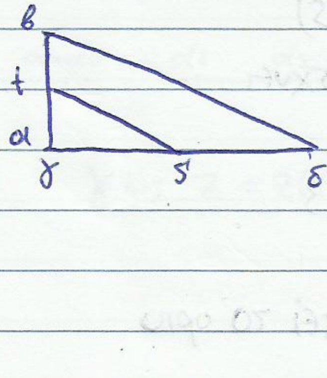
$$\frac{t-a}{s-\gamma} = \frac{b-a}{\delta-\gamma} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = a + \frac{b-a}{\delta-\gamma}(s-\gamma), \quad s \in [\gamma,\delta]$$

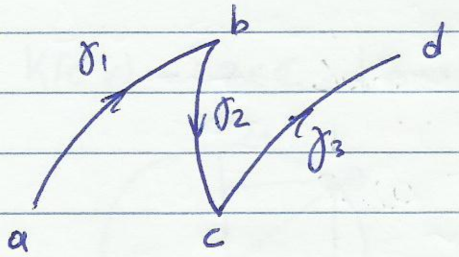


Έτσι, $z(t) = z(t(s)) = z\left(a + \frac{b-a}{\delta-\gamma}(s-\gamma)\right) \overset{\circ}{=} z^*(s)$

Μπορούμε να πάρουμε και το σχήμα



ΤΜΗΜΑΤΑ/ΚΑΜΠΥΛΕΣ



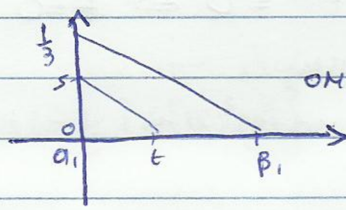
$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ οι καμπύλες $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ προστίθενται

$z(t),\ t \in [0,1]$

$\gamma_1 : z_1(t),\ t \in [a_1, b_1]$

$\gamma_2 : z_2(t),\ t \in [a_2, b_2]$

$\gamma_3 : z_3(t),\ t \in [a_3, b_3]$

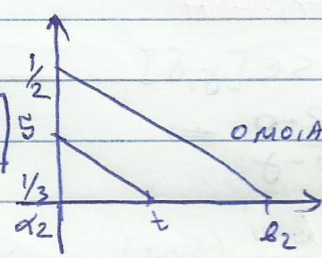


- $t \in [a_1, b_1] \longrightarrow [0, \frac{1}{3}] \ni s$

$$\frac{s-0}{1/3} = \frac{t-a_1}{b_1-a_1} \Rightarrow \boxed{t = \alpha_1 + 3(b_1-a_1)s},\ s \in [0, \tfrac{1}{3}]$$

- $t \in [a_2, b_2] \longrightarrow s \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$

$$\frac{s-\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = \frac{t-a_2}{b_2-a_2} \rightarrow \boxed{t = a_2 + 6(b_2-a_2)(s-\tfrac{1}{3})}$$



άρα $t = \alpha_2 + 6(b_2-a_2)(s-\frac{1}{3}),\ s \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$

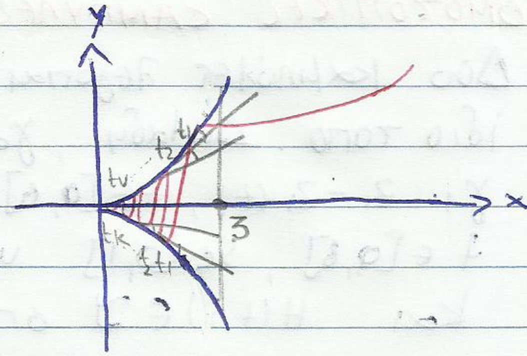
- $t \in [a_3, b_3] \longrightarrow s \in [\frac{1}{2}, 1]$ όμοια με τα παραπάνω

άρα βρίσκουμε για κάθε διάστημα την $z^*(s)$ στα σημεία της ένωσης παράστασης ισχύει η ιδιότητα:

$$\exists \lim_{t \to b_j} z_j'(t) \quad \text{και} \quad \exists \lim_{t \to a_j} z_j'(t) \quad \forall j = 1,2,3$$

δηλ. εκεί που "κόβεται" η καμπύλη να υπάρχει το όριο πχ

$y = x^2 \eta\mu \frac{1}{x}$



$z = x + iy = x + i x^2 \eta\mu \frac{1}{x}$, $x \in [0,3]$

$z(t) = t + i t^2 \eta\mu \frac{1}{t}$, $t \in [0,3]$

$y'(t_\nu) = 1 \to 1$ αλλά και $y'(t_k) = -1 \to -1$

άρα προέκυψε ότι για δύο ακολουθίες x_ν, y_ν :

$x_\nu \to x_0 \leftarrow y_\nu \Rightarrow f(x_\nu) \to \alpha$ και $f(y_\nu) \to b$, $\alpha \neq b$

άρα το όριο δεν υπάρχει και άρα η z ασυνεχής

δηλ. δεν θα υπάρχουν παράγωγοι.

ΜΗΚΟΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ:

$$\mu(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt \qquad \mu\epsilon \ z(t), \ t \in [a,b]$$

Το γράφημα της $y = f(x)$, $x \in [a,b]$ έχει μήκος

για $x = t$

$$\mu(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt$$

ΤΜΗΜΑΤΑ / ΚΑΜΠΥΛΕΣ

$\gamma = \gamma_0 + \gamma + \gamma + \dots + \gamma_\nu$

$z = z(t)$, $t \in [a, b]$

$\alpha = \alpha_0 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2 \ \dots \quad \alpha_{\nu-1} \quad b = \alpha_\nu$

$\gamma_j : z = z(t)$, $t \in [a_{j-1}, a_j]$, $j = 0, 1, \dots, \nu$